ҒТАХР 50.03.00 DOI: https://doi.org/10.62687/STJ.1.2.2026.25

# ҚАТАҢ ЕМЕС ШАРТТАРДА СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ЖҮЙЕЛЕРДІ ПРАКТИКАЛЫҚ ІЗГЕ ТҮСІРУДІ БАСҚАРУ ӘДІСТЕРІ

**[1]А.К. Ерденова, [2]Н. Тасболатұлы***

[1,2]Астана халықаралық университеті, Астана, Қазақстан

*e-mail: nurbolat.tasbolatuly@aiu.edu.kz

**А.К. Ерденова** – PhD, Педагогикалық институт аға оқытушысы, Астана халықаралық университеті, Астана, Қазақстан, e-mail: erdenova_aigerim@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2936-5698

**Н. Тасболатұлы** – PhD, қауымдастырылған профессор, Ақпараттық технологиялар және инженерия жоғары мектебі, Астана халықаралық университеті, Астана, Қазақстан, e-mail: nurbolat.tasbolatuly@aiu.edu.kz, https://orcid.org/0000-0002-0511-7000

**Аңдатпа.** Жоғары ретті сызықты емес жүйелер үшін, әсіресе белгісіздіктер мен уақыт бойынша айнымалы кешігулер жағдайында, практикалық ізге түсіруді қамтамасыз ету күрделі ғылыми мәселе болып табылады. Бұл жұмыста қатаң емес шарттарда жұмыс істейтін басқару әдістері ұсынылады. Зерттеу барысында біртекті үстемдік ету әдісі, қуат интеграторы техникасы және Ляпунов-Красовский функционалдары негізінде күй және шығыс кері байланыс контроллерлері синтезделді. Ұсынылған тәсіл жүйе параметрлеріндегі белгісіздіктер мен кешігулерді ескере отырып, басқару заңдарын құруға мүмкіндік береді. Алынған нәтижелер тұйық циклдік жүйенің барлық күйлерінің кең ауқымды шектелгендігін және ізге түсіру қателігінің ақырлы уақыттан кейін алдын ала берілген дәлдік аймағына жеткізілетіндігін теориялық түрде дәлелдейді. Ұсынылған әдіс қолданыстағы нәтижелермен салыстырғанда жүйеге қойылатын шарттардың әлсіретілуімен және жоғары ретті сызықты еместіктер жағдайында қолдану мүмкіндігімен ерекшеленеді. Әсіресе, параметрлік белгісіздіктер мен уақыт бойынша айнымалы кешігулер жағдайында жүйенің тұрақтылығын қамтамасыз ету және қажетті дәлдікпен ізге түсіру мәселелерін шешуде оның практикалық маңызы зор. Сонымен қатар, алынған теориялық нәтижелер ұсынылған тәсілдің әртүрлі инженерлік жүйелерде, соның ішінде робототехника, автоматтандырылған басқару жүйелері және энергетикалық процестерде қолдануға болатынын көрсетеді.

**Түйінді сөздер:** сызықты емес жүйелер, кері байланыс, практикалық ізге түсіру, орнықтылық, Ляпунов әдісі.

# CONTROL METHODS FOR PRACTICAL TRACKING OF NONLINEAR SYSTEMS UNDER NON-STRICT CONDITIONS

**[1]A.K. Yerdenova, [2]N. Tasbolatuly***

[1,2]Astana International University, Astana, Kazakhstan

*e-mail: nurbolat.tasbolatuly@aiu.edu.kz

**A.K. Erdenova** – PhD, Senior Lecturer of the Pedagogical Institute, Astana International University, Astana, Kazakhstan, e-mail: erdenova_aigerim@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2936-5698

**N. Tasbolatuly** – PhD, Associate Professor, Higher School of Information Technologies and Engineering, Astana International University, Astana, Kazakhstan, e-mail: nurbolat.tasbolatuly@aiu.edu.kz, https://orcid.org/0000-0002-0511-7000

**Abstract.** For high-order nonlinear systems, especially in the presence of uncertainties and time-varying delays, achieving practical output tracking is a challenging scientific problem. This paper proposes control methods operating under non-strict conditions. During the study, state- and output-feedback controllers were synthesized based on the homogeneous domination approach, the power integrator technique, and Lyapunov-Krasovskii functionals. The proposed approach enables the construction of control laws while taking into account parameter uncertainties and time delays in the system. The obtained results theoretically prove that all states of the closed-loop system are uniformly bounded and that the tracking error converges to a predefined accuracy region after a finite time. Compared with existing results, the proposed method is characterized by relaxed assumptions on the system and applicability to high-order nonlinearities. In particular, it is highly effective in ensuring stability and achieving accurate tracking under parametric uncertainties and time-varying delays. Moreover, the theoretical results demonstrate that the proposed approach can be applied to various engineering systems, including robotics, automated control systems, and energy processes.

**Keywords:** nonlinear systems, feedback control, practical output tracking, stability, Lyapunov method.

## МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИМ ОТСЛЕЖИВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕСТРОГИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

**[1]А.К. Ерденова**, **[2]Н. Тасболатұлы***
[1,2]Международный университет Астана, Астана, Казахстан
*e-mail: nurbolat.tasbolatuly@aiu.edu.kz

**А.К. Ерденова** – PhD, старший преподаватель педагогического института, Международный университет Астана, Астана, Казахстан, e-mail: erdenova_aigerim@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2936-5698

**Н. Тасболатұлы** – PhD, ассоциированный профессор, Высшая школа информационных технологий и инженерии, Международный университет Астана, Астана, Казахстан, e-mail: nurbolat.tasbolatuly@aiu.edu.kz, https://orcid.org/0000-0002-0511-7000

**Аннотация.** Для нелинейных систем высокого порядка, особенно при наличии неопределённостей и переменных по времени задержек, обеспечение практического отслеживания выходных сигналов представляет собой сложную научную задачу. В данной работе предложены методы управления, функционирующие в условиях нестрогих ограничений. В ходе исследования синтезированы регуляторы состояния и выходной обратной связи на основе метода однородного доминирования, техники интегратора мощности и функционалов Ляпунова-Красовского. Предложенный подход позволяет формировать законы управления с учётом параметрических неопределённостей и временных задержек в системе. Полученные результаты теоретически доказывают, что все состояния замкнутой системы являются равномерно ограниченными, а ошибка слежения сходится к заданной области точности за конечное время. По сравнению с существующими результатами, предложенный метод характеризуется ослабленными предположениями относительно системы и применимостью к нелинейностям высокого порядка. В частности, он обеспечивает эффективную устойчивость и точное отслеживание при наличии параметрических неопределённостей и переменных задержек. Кроме того, теоретические результаты демонстрируют возможность применения предложенного подхода в различных инженерных системах, включая робототехнику, автоматизированные системы управления и энергетические процессы.

**Ключевые слова:** нелинейные системы, обратная связь, практическое отслеживание, устойчивость, метод Ляпунова.

**Кіріспе.** Соңғы жылдары жоғары ретті сызықты емес жүйелерді басқару мәселелері, әсіресе белгісіздіктер, уақыт бойынша айнымалы кешігулер және толық емес өлшеулер жағдайында, басқару теориясының маңызды бағыттарының біріне айналды. Бұл жүйелер авиация, робототехника, биология, экономика және басқа да көптеген салаларда кездеседі.

Жоғары ретті сызықты емес жүйелер үшін басқару алгоритмдерін құру кезінде негізгі қиындықтар сызықты емостіктердің жоғары өсу ретімен, жүйе параметрлерінің белгісіздігімен және уақыт бойынша кешігулердің болуымен байланысты. Бұл факторлар классикалық басқару әдістерінің қолданылуын шектейді және жаңа, әлсіз шарттарға негізделген тәсілдерді әзірлеуді талап етеді.

Қазіргі уақытта практикалық ізге түсіру мәселесіне ерекше назар аударылуда. Бұл тәсіл жүйе күйін нөлге дәл жеткізуді талап етпей, берілген дәлдік аймағына жеткізуді қамтамасыз етеді, сондықтан нақты жүйелер үшін тиімді болып табылады.

Осыған байланысты, бұл жұмыстың мақсаты - қатаң емес шарттарда жоғары ретті сызықты емес жүйелер үшін практикалық ізге түсіруді қамтамасыз ететін басқару әдістерін әзірлеу.

*Әдебиеттерге шолу.* Сызықты емес жүйелерді басқару теориясының дамуы Х. Халил (Khalil, 2002) және А. Исидори (Isidori, 2000) еңбектерінен бастау алады, онда орнықтылықты талдаудың негізгі құралдары ретінде Ляпунов әдісі кеңінен қарастырылған.

Сызықты емес жүйелерді басқарудың негізгі тәсілдерінің бірі – кері байланыс әдістері. Күй кері байланыс жүйені орнықтандыруды қамтамасыз етсе, шығыс кері байланыс толық күй өлшенбейтін жағдайларда бақылаушыларды қолдануды талап етеді. Бұл өз кезегінде басқару синтезін күрделендіреді.

Уақыт бойынша кешігулер жүйенің динамикасына елеулі әсер етеді және басқару жүйесінің орнықтылығын қамтамасыз етуді қиындатады.

Жоғары ретті сызықты емес жүйелер үшін тиімді басқару әдістеріне backstepping (кері қадамдық синтез), біртекті үстемдік ету және қуат интеграторы техникасы жатады. Бұл тәсілдер жоғары өсу реті бар сызықты еместіктер жағдайында басқару заңдарын құруға мүмкіндік береді.

Соңғы зерттеулерде практикалық ізге түсіру мәселесіне ерекше назар аударылуда. Мысалы, (Qian and Lin, 2002; Lin and Pongvuthithum, 2003; Yan and Liu, 2012; Sun et al., 2008; Polendo and Qian, 2007) жұмыстарында белгісіз параметрлері бар сызықты емес жүйелер үшін шығыс кері байланыс арқылы практикалық ізге түсіру қарастырылған.

Кең ауқымды практикалық бақылау – бұл кез келген бастапқы шарт үшін ізге түсіру қателігі жеткілікті аз болатындай, бірақ міндетті түрде нөлге жинақталмайтындай мәселені қарастырады. Бұл қателігі нөлге жинақталатын кең ауқымды асимптотикалық бақылаудан ерекшеленеді.

Шығыс бойынша кері байланыс әдістері күрделірек, өйткені контроллер барлық күйлерге емес, тек жүйенің шығысына қол жеткізе алады. Бұл өлшенбейтін күйді бағалау үшін бақылаушылардың жобасын қажет етеді, бұл жоғары ретті сызықты емес және уақыт бойынша кешігуі бар немесе өлшеу шуы сияқты қосымша факторлар болған кезде күрделене түседі.

Шығыс кері байланыс сонымен қатар күйлерді бағалау дәлдігіне әсер етуі мүмкін өлшеу шуларын және сәйкес келмейтін ауытқуларды да ескеруі керек. Мысалы келесі еңбектерде уақыт бойынша кешігуі бар сызықты емес жүйелер үшін адаптивті басқару және шығуды бақылау әдістері қарастырылған (Sun et al., 2013; Jia et al., 2015; BenAbdallah et al., 2013; Daniel et al., 2005; Hua et al., 2008). Негізгі назар белгісіз параметрлер, уақыттық кешігулер және сызықты емес әсерлер жағдайында орнықтылық пен практикалық траекторияны бақылауды қамтамасыз етуге бағытталған.

Уақыт бойынша кешігу физикалық процестерге, сигналды жеткізуге немесе есептеу ресурстарының шектеулеріне байланысты пайда болады. Ляпунов-Красовский функционалдарын қолдану кешігуі бар жүйелердің орнықтылығын талдаудың негізгі әдістерінің бірі болып табылады (Тасболатұлы және т.б., 2024).

Алайда, қолданыстағы жұмыстардың көпшілігінде уақыт бойынша айнымалы кешігулер мен жоғары ретті сызықты еместіктер толық ескерілмейді, сондай-ақ жүйеге қойылатын шарттар жеткілікті түрде қатаң болып табылады.

Осыған байланысты, қатаң емес шарттарда жұмыс істейтін және жоғары ретті сызықты емес жүйелер үшін практикалық ізге түсіруді қамтамасыз ететін басқару әдістерін әзірлеу өзекті ғылыми мәселе болып табылады.

**Зерттеу материалдары мен әдістері.**

Бұл жұмыста жоғары ретті сызықты емес жүйелер үшін күй кері байланыс негізінде кең ауқымды практикалық ізге түсіру есебі қарастырылады. Зерттелетін жүйе белгісіз параметрлермен және уақыт бойынша айнымалы кешігулермен сипатталады.

Басқару заңын синтездеу үшін таңба функциясы және қуат интеграторы әдісі қолданылады. Әзірленген контроллер нәтижесінде алынатын тұйық циклдық жүйенің барлық күйлері кең ауқымды шектелген болады. Сонымен қатар, шекті уақыттан кейін ізге түсіру қателігі жеткілікті аз болады.

Келесі түрдегі жоғары ретті сызықты емес жүйе қарастырылады:

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = z_{i+1}^{p_i}(t) + \varphi_i\big(z(t), z_1(t-\tau_1), \ldots, z_n(t-\tau_n)\big), \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ \dot{z}_n(t) = u^{p_n}(t) + \varphi_n\big(z(t), z_1(t-\tau_1), \ldots, z_n(t-\tau_n)\big), \\ \quad y = z_1. \end{cases} \tag{1}$$

мұнда $z(t) = [z_1(t), \ldots, z_n(t)]^T \in R^n$ жүйенің күйі (немесе шешімі), $z_{n+1}(t) := u(t) \in R$ кіріс контроллері, $\tau_i \in R^+$, $i = 1, \ldots, n$ күйдің уақыт бойынша кешігуі және ол келесі шартты қанағаттандырады: $\tau \geq \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, жүйе $z(\theta) = \xi_0(\theta)$, $\forall\, \theta \in [-\tau, 0]$ бастапқы шартын қанағаттандырады, мұндағы $\xi_0(\theta)$ -- берілген үздіксіз функция, $\varphi_i : R^n \times R^n \to R$, $i = 1, \ldots, n$ белгісіз үздіксіз функция, $p_i \in R_{\text{odd}}^{\geq 1} := \{p/q \mid p \geq q\}$, $i = 1, \ldots, n$ -- жүйенің жоғары дәрежесі, мұндағы $p$ және $q$ тақ бүтін сандар. Егер $p_i = 1$ болса, (1) жүйе үшбұрышты формадағы уақыт бойынша кешігуі бар сызықты емес жүйеге келеді, оларды басқару конструкциясы кері қадам әдістемесі негізінде алынған бірнеше зерттеулері бар([11-13] және т.б.). $p_i > 1$ болғанда (1) жүйенің Якобиандық сызықтандырылуы координата басында басқарылмайтындығын байқауға болады, ал ол өз кезегінде кері байланыс негізінде сызықтандырылмайды.

Шығысты практикалық ізге түсіру келесі түрде анықталады:

(1) жүйенің $y_r(t)$ тірек сигналы $[0, +\infty)$ аралығында уақыт айнымалысы бойынша $C^1$-шектеулі болсын, онда күй контроллері арқылы шығысты кең ауқымды практикалық ізге түсіруді былай тұжырымдаймыз:

Кез келген $\varepsilon > 0$ оң нақты саны үшін

$$u = u\big(z, y_r(t)\big) \tag{2}$$

үзіліссіз контроллері құрылады және ол төмендегі шарттарды қанағаттандырады:

1) (1)-(2) тұйық жүйенің барлық күйлері $[0, +\infty)$ аралығында анықталған және кең ауқымды шектеулі болады;

2) Кез келген $\varepsilon > 0$ оң саны үшін $T > 0$ ақырлы уақытты табылып, (1)--(2) тұйық жүйенің $y(t)$ шығысы

$$|y(t) - y_r(t)| = |z_1(t) - y_r(t)| < \varepsilon, \qquad \forall\, t \geq T > 0 \tag{3}$$

шартын қанағаттандыратын болса, онда тұйық-циклдық жүйенің шығысы кең ауқымды практикалық ізге түсіріледі.

Шығысты кең ауқымды практикалық ізге түсіру мәселесін шешу үшін келесі болжамдарды қарастырамыз:

*Болжам 1.* Әрбір $i = 1, \ldots, n$ үшін $C_1, C_2 \geq 0$ және $\omega \geq 0$ белгілі тұрақтылары табылып, келесі шарт орындалады:

$$\big|\varphi_i\big(z(t), z_1(t-\tau_1), \ldots, z_n(t-\tau_n)\big)\big| \leq C_1 \left( \sum_{j=1}^{i} |z_j(t)|^{\frac{r_i+\omega}{r_j}} + \sum_{j=1}^{i} |z_j(t-\tau_j)|^{\frac{r_i+\omega}{r_j}} \right) + C_2. \tag{4}$$

мұнда $r_i$ келесі түрде анықталады:

$$r_1 = 1, \qquad r_i = \frac{r_{i-1} + \omega}{p_{i-1}}, \qquad i = 2, 3, \ldots, n+1. \tag{5}$$

$\frac{r_i+\omega}{r_j}$-саны белгілі бір нүктеде емес, қайсыбір интервалда мән қабылдайды.

*Болжам 2.* (тірек сигналының шектеулілігі): $y_r(t)$ тірек сигналы үздіксіз дифференциалданатын болса және сонымен қатар, $D > 0$ оң белгісіз тұрақтысы табылып келесі теңсіздік орындалады:

$$|y_r(t)| + |\dot{y}_r(t)| \le D, \qquad \forall\, t \in [0, +\infty). \tag{6}$$

**Нәтижелер.** Қойылған мақсатқа жету үшін алдымен келесідей координат түрлендіруін енгізейік:

$$\begin{cases} x_k(t) = [z_k(t)]^{\frac{\sigma}{r_k}} - \left[\alpha_{k-1}\big(Z_{k-1}(t)\big)\right]^{\frac{\sigma}{r_k}}, \qquad k = 1, \ldots, n, \\ \alpha_k\big(Z_k(t)\big) = -\big(\boldsymbol{sign}(x_k(t))\big)^{p_k} g_k^{\frac{r_{k+1}}{\sigma}} \, |x_k(t)|^{\frac{r_{k+1}}{\sigma}}, \quad k = 1, \ldots, n, \\ u(t) = \alpha_n(t), \\ y = x_1 + y_r(t). \end{cases} \tag{7}$$

мұнда $\sigma$ - $\sigma \ge \max\{r_i + \omega\}$ шартын қанағаттандыратын оң тұрақты, $\alpha_k : R^k \to R$, $k = 1, \ldots, n$, $g_k > 1$ оң тұрақтысы бар виртуалды контроллерлер деп аталады. Біріздiлік үшін $p_0 = g_0 = 1$, $\alpha_0(t) = 0$ деп есептейміз.

$\sigma$ - жұп оң анықталған тұрақты сан болса, онда $x_1(t) = z_1^{\sigma/r_1} \ge 0$ қарама-қайшылыққа келеміз, сондықтан *sign* таңба функциясын (7) координат түрлендіруіне енгізу арқылы $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ барлық мүмкін мәндерін табуға болады. $p_k \in R_{\text{odd}}^{\ge 1}$ тақ бүтін сан және $\alpha_k(Z_k(t))$ өрнегінен $\boldsymbol{sign}(\alpha_k(Z_k(t))) = -\boldsymbol{sign}(x_k(t))$ болатынындығын аламыз. Демек келесі теңдік орынды болады:

$$\begin{aligned} \left[\alpha_{k-1}\big(Z_{k-1}(t)\big)\right]^{\frac{\sigma}{r_k}} &= -\boldsymbol{sign}\big(x_{k-1}(t)\big) \left| -\big(\boldsymbol{sign}\big(x_{k-1}(t)\big)\big)^{\frac{1}{p_{k-1}}} g_{k-1}^{\frac{r_k}{\sigma}} |x_{k-1}(t)|^{\frac{r_k}{\sigma}} \right|^{\frac{\sigma}{r_k}} \\ &= -\boldsymbol{sign}\big(x_{k-1}(t)\big) g_{k-1} |x_{k-1}(t)| \\ &= -g_{k-1} x_{k-1}(t) \\ &= -\sum_{i=1}^{k-1} \left( \prod_{j=i}^{k-1} g_j \right) [z_i(t)]^{\frac{\sigma}{r_i}}. \end{aligned} \tag{8}$$

$r_i \le r_i + \omega \le \sigma$ болатындығын ескерсек (8) теңдеуден келесідей қорытынды жасауға болады:

$$[\alpha_1(x_1(t))]^{\frac{\sigma}{r_1}}, \ldots, [\alpha_{n-1}(X_{n-1}(t))]^{\frac{\sigma}{r_n}}$$

функциясы $t$ бойынша үздіксіз дифференциалданады, онда осының негізінде $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ $t$ бойынша үздіксіз дифференциалданатын болады және бұдан түрленген жүйені аламыз. $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ $t$ бойынша үздіксіз дифференциалдануы (7) түрлендіру арқылы нақты $u(t)$ контроллерін құруды қамтамасыз етеді.

Ляпунов функциясын құрайық

$$W_{H_k}\big(Z_k(t)\big) = \int_{\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))}^{z_k(t)} \left( [s]^{\frac{\sigma}{r_k}} - \left[\alpha_{k-1}\big(Z_{k-1}(t)\big)\right]^{\frac{\sigma}{r_k}} \right) ds,$$

$$W_{D_k}(t) = (n-k+1) \int_{t-\tau_k}^{t} x_k^2(l)\, dl + (n-k) \int_{t-\tau_{k+1}}^{t} x_k^2(l)\, dl, \qquad k = 1, \ldots, n;\ \tau_{n+1} = 0.$$

Бұл $W_{H_k}(t), W_{D_k}(t)$ функциялары төмендегі тұжырыммен сипатталады.

*Тұжырым 1.* $k = 1,\dots,n$ үшін $W_{H_k}(t)$ және $W_{D_k}(t)$ функциялары үздіксіз дифференциалданады және келесі теңдікті қанағаттандырады:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_{H_k}(Z_k(t))}{\partial z_k(t)} = [x_k(t)]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}, \\ \dfrac{\partial W_{H_k}(Z_k(t))}{\partial z_i(t)} = -\displaystyle\int_{\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))}^{z_k(t)} \left| [s]^{\frac{\sigma}{r_k}} - [\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))]^{\frac{\sigma}{r_k}} \right|^{\frac{2\sigma-r_{k+1}p_k}{\sigma}} ds \\ \qquad \times \dfrac{2\sigma - r_{k+1}p_k}{\sigma} \dfrac{\partial}{\partial z_i(t)} \left( [\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))]^{\frac{\sigma}{r_k}} \right), \qquad i = 1,\dots,k-1, \\ \dfrac{dW_{D_k}(t)}{dt} = (2n-2k+1)x_k^2(t) - (n-k+1)x_k^2(t-\tau_k) - (n-k)x_k^2(t-\tau_{k+1}). \end{cases} \tag{9}$$

$$2^{\frac{(2\sigma-\omega-r_k)(r_k-\sigma)}{\sigma r_k}} \cdot \frac{r_k}{2\sigma-\omega} \left| z_k(t) - \alpha_{k-1}\big(Z_{k-1}(t)\big) \right|^{\frac{2\sigma-\omega}{r_k}} \le W_{H_k}\big(Z_k(t)\big) \le 2^{1-\frac{r_k}{\sigma}} |x_k(t)|^{\frac{2\sigma-\omega}{\sigma}}.$$

$V_1 = W_{H_1} + W_{D_1}$ болатындай $V_1$-ді таңдап аламыз. Оның уақыт бойынша туындысын тауып, 1-тұжырымды қолдансақ мынаны аламыз:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = {} & [x_1]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}} \alpha_1^{p_1} + [x_1]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}} (z_2^{p_1} - \alpha_1^{p_1}) + [x_1]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}} f_1 \\ & + (2n-1)x_1^2 - nx_1^2(t-\tau_1) \\ & - (n-1)x_1^2(t-\tau_2). \end{aligned} \tag{10}$$

1-болжам негізінде келесі бағалау орындалады:

$$\begin{aligned} [x_1]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}} \varphi_1 & \le C |x_1|^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}} \left( |x_1|^{\frac{\omega+r_1}{\sigma}} + |x_1(t-\tau_1)|^{\frac{\omega+r_1}{\sigma}} \right) \\ & \le \left( C + \frac{2\sigma-\omega-r_1}{2\sigma} \left( \frac{\omega+r_1}{2\sigma} \right)^{\frac{\omega+r_1}{2\sigma-\omega-r_1}} C^{\frac{2\sigma}{2\sigma-\omega-r_1}} \right) x_1^2 + x_1^2(t-\tau_1) \\ & := \beta_1 x_1^2 + x_1^2(t-\tau_1). \end{aligned} \tag{11}$$

Енді бірінші $\alpha_1$ виртуалды контроллерді былай таңдап алайық:

$$\alpha_1^{p_1}(z_1) = -\text{sign}(x_1) g_1^{\frac{r_1+\omega}{\sigma}} |x_1|^{\frac{r_1+\omega}{\sigma}}. \tag{12}$$

мұнда $g_1 = (3n-1+\beta_1)^{\frac{\sigma}{r_1+\omega}} > 1$. (11) мен (12) теңдіктерді қолданып (10) теңдікті былай жазуға болады:

$$\dot{V}_1 \le -nx_1^2 - (n-1)\left( x_1^2(t-\tau_1) + x_1^2(t-\tau_2) \right) [x_1]^{\frac{2\sigma-\omega-r_1}{\sigma}} (z_2^{p_1} - \alpha_1^{p_1}).$$

Бұдан рекурсивті қадамға көшсек, $(k-1)$-ші қадамда

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k-1} \le {} & -(n-k+2) \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 \\ & -(n-k+1) \sum_{i=1}^{k-1} \left( x_i^2(t-\tau_i) + x_i^2(t-\tau_{i+1}) \right) \\ & + [x_{k-1}]^{\frac{2\sigma-\omega-r_{k-1}}{\sigma}} \left( z_k^{p_{k-1}} - \alpha_{k-1}^{p_{k-1}} \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Келесі қадамда $V_k = V_{k-1} + W_{H_k} + W_{D_k}$ болатындай етіп, $V_k$-ны таңдаймыз. Оның уақыт бойынша туындысын (1)-ші теңдеудің шешімінің төңірегінде тауып, (13) теңдеу мен 1-тұжырымды қолдансақ мынаны аламыз:

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_k \le & -(n-k+2)\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 \\
& -(n-k+1)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2(t-\tau_{i+1})\right) \\
& -(n-k)x_k^2(t-\tau_{k+1}) \\
& +(2n-2k+1)x_k^2 \\
& +[x_k]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}\left(z_{k+1}^{p_k}-\alpha_k^{p_k}\right) \ + \ [x_k]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}\alpha_k^{p_k} \ + \ [x_k]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}} f_k \\
& +[x_{k-1}]^{\frac{2\sigma-\omega-r_{k-1}}{\sigma}}\left(z_k^{p_{k-1}}-\alpha_{k-1}^{p_{k-1}}\right) \\
& -\frac{2\sigma-r_{k+1}p_k}{\sigma}\int_{\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))}^{z_k(t)} \left|[s]^{\frac{\sigma}{r_k}}-[\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right|^{\frac{\sigma-r_{k+1}p_k}{\sigma}} ds \\
& \quad \times \sum_{i=1}^{k-1}\left(x_{i+1}^{p_i}+f_i\right)\frac{\partial}{\partial z_i(t)}\left([\alpha_{k-1}(Z_{k-1}(t))]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Ары қарай $\alpha_k$ виртуалды контроллерін құру үшін (14) теңдеудің оң жағындағы соңғы үш мүшесіне сәйкес шектеуші бағалау беру керек. Ол келесідей 3 лемманың негізінде қол жетімді болады.

*Лемма 1:* Оң тұрақты $\beta_k$ табылып, келесі теңсіздік орындалады:

$$
[x_{k-1}]^{\frac{2\sigma-\omega-r_{k-1}}{\sigma}}\left(z_k^{p_{k-1}}-\alpha_{k-1}^{p_{k-1}}\right) \le 2^{1-\frac{r_k+\omega}{\sigma}}\left|x_{k-1}\right|^{\frac{2\sigma-\omega-r_{k-1}}{\sigma}}\left|x_k\right| \le \frac{1}{2}x_{k-1}^2+\beta_{k1}x_k^2. \tag{15}
$$

*Лемма 2:* Келесі бағалау орындалады:

$$
\begin{aligned}
[x_k]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}} f_k \le \beta_{k2}x_k^2 \ + \ \frac{1}{3}x_{k-1}^2 \ + \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}x_i^2 & \\
+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2(t-\tau_i) \ + \ x_k^2(t-\tau_k) & \\
+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}x_i^2(t-\tau_{i+1}) \ + \ x_{k-1}^2(t-\tau_k). &
\end{aligned}
\tag{16}
$$

*Лемма 3:*

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2\sigma-r_{k+1}p_k}{\sigma}\int_{\alpha_{k-1}}^{z_k}\left|[s]^{\frac{\sigma}{r_k}}-[\alpha_{k-1}]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right|^{\frac{\sigma-r_{k+1}p_k}{\sigma}} ds\cdot\sum_{i=1}^{k-1}\left(x_{i+1}^{p_i}+f_i\right)\frac{\partial}{\partial z_i}\left([\alpha_{k-1}]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right)\right) \\
&\le \beta_{k3}x_k^2 \ + \ \frac{1}{3}x_{k-1}^2 \ + \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}x_i^2 \ + \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}x_i^2(t-\tau_i) \ + \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2}x_i^2(t-\tau_{i+1}).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Алынған нәтижелерді (14) қойып, мынаны аламыз:

$$\begin{aligned}\dot{V}_k \leq\ & -(n-k+1)\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \\ & -(n-k)\sum_{i=1}^{k} x_i^2(t-\tau_i) - (n-k)\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2(t-\tau_{i+1}) \\ & + [x_k]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}}\, \alpha_k^{p_k} \ +\ (2n-2k+1+\beta_k)x_k^2 \\ & + [x_k]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}} \left(z_{k+1}^{p_k} - \alpha_k^{p_k}\right),\end{aligned} \tag{18}$$

мұнда $\beta_k = \beta_{k1} + \beta_{k2} + \beta_{k3}$. Осылайша $\alpha_k$ виртуалды контроллерін келесі түрде таңдап алайық:

$$\alpha_k^{p_k}(Z_k) = -\mathrm{sign}(x_k) g_k^{\frac{r_k+\omega}{\sigma}} \left|x_k\right|^{\frac{r_k+\omega}{\sigma}}, \tag{19}$$

мұнда $g_k = (3n-3k+2+\beta_k)^{\frac{\sigma}{r_k+\omega}} > 1$ -- оң тұрақты. Бұл индуктивті қадамды аяқтайды. Бұдан

$$\dot{V}_k \leq -(n-k+1)\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - (n-k)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2(t-\tau_{i+1})\right) + [x_k]^{\frac{2\sigma-\omega-r_k}{\sigma}} \left(z_{k+1}^{p_k} - \alpha_k^{p_k}\right). \tag{20}$$

$k = n$ болғанда $V_n : R^n \to R^+$ Ляпунов функционалы үшін

$$V_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \left(W_{H_i}(\cdot) + W_{D_i}(\cdot)\right) \tag{21}$$

болады.

Жоғарыда келтірілген индуктивті болжамды қолдана отырып, $n$-ші қадамда $z_{n+1} = \alpha_n = u$ екенін ескеріп, $\alpha_n : R^n \to R$ үздіксіз функциясын құра аламыз, бұдан $u : R^n \to R$ контроллері келесі түрде алынады:

$$u(z) = -\left(\mathrm{sign}(x_n)\right)^{\frac{1}{p_n}} g_n^{\frac{1}{r_{n+1}}} \left|x_n\right|^{\frac{r_{n+1}}{\sigma}}. \tag{22}$$

Осыдан келесі бағалау алынады:

$$\dot{V}_n \leq -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\delta. \tag{23}$$

$$\begin{aligned} W_{H_k}(t) &\leq \left|[z_k(t)]^{\frac{\sigma}{r_k}} - \left[\alpha_{k-1}\big(Z_{k-1}(t)\big)\right]^{\frac{\sigma}{r_k}}\right|^{\frac{2\sigma - r_{k+1}p_k}{\sigma}} \times \left|z_k(t) - \alpha_{k-1}\big(Z_{k-1}(t)\big)\right| \\ &\leq 2^{1-\frac{r_k}{\sigma}} \left|x_k(t)\right|^{\frac{2\sigma-\omega}{\sigma}}. \end{aligned}$$

$\lambda = \frac{2\sigma-\omega}{\sigma}$ болсын. Сонда келесі шартты алуға болады:

$$\dot{V}_n \leq -\left(\frac{1}{2}V_n\right)^{\frac{1}{\lambda}} + n\delta. \tag{24}$$

Келесі түрдегі жиынды енгізейік

$$\Omega := \left\{x(t) \in R^n \mid V_n \geq 2(2n\delta)^{\lambda}\right\} \tag{25}$$

және $x(t)$-$x(0)$ бастапқы күйі бар (7) жүйенің траекториясы болсын. Егер $x(t) \in \Omega$ болса, онда (25)-тен мынау шығады:

$$\dot{V}_n \leq -\left(\frac{1}{2}V_n\right)^{\frac{1}{\lambda}} + n\delta \leq -n\delta < 0. \tag{26}$$

Бұл дегеніміз, $x(t) \in \Omega$ болғанда, $V_n$ - $t$ уақыт өте келе қатаң кемімелі болады, демек $x(t)$ -- $R^n$ кеңістігінің $\Omega$ толықтаушы жиынтығына ақырлы $T > 0$ уақытында еніп, сол жерде мәңгі қалуы керек дегенді білдіреді. Бұдан (7) тұйық жүйенің $x(t)$ шешімі $[0, +\infty)$ аралығында анықталған және кең ауқымды шектелген болады. Енді (3) шарттың орындылығын (9), (24) қолданып, және $\delta$ параметрін таңдау арқылы көрсетуге болады.

$$|y(t) - y_r(t)| = |x_1(t)| \leq V_n \leq 2(2n\delta)^{\frac{2\sigma-\omega}{\sigma}} < \varepsilon$$

Бұдан кез келген $\varepsilon > 0$ үшін (22) түрдегі үздіксіз күй кері байланыс контроллері (3) шартты қанағаттандыратын шығысты кең ауқымды практикалық ізге түсіру есебін шешеді.

*Теорема.* Егер Болжам 1-2 орындалса, онда (22) түрдегі үздіксіз күй кері байланыс контроллері тұйық жүйенің барлық күйлерінің кең ауқымды шектелгендігін қамтамасыз етеді және ізге түсіру қатесінің ақырлы уақыттан кейін алдын ала берілген дәлдік аймағына жеткізеді.

Осылайша, ұсынылған басқару заңы (22) түрінде алынып, ол кең ауқымды практикалық ізге түсіру есебінің шешімін қамтамасыз етеді және теориялық түрде дәлелденеді.

Қарастырылған жүйе жалпы жүйенің жекелеген жағдайы болып табылады, бұл алынған нәтижелердің жалпылығы мен дұрыстығын көрсетеді.

Ұсынылған әдіс алдыңғы жұмыстармен салыстырғанда уақыт бойынша айнымалы кешігулер мен жоғары ретті сызықты еместіктерді бір мезгілде ескеруімен және жүйеге қойылатын шарттардың әлсіретілуімен ерекшеленеді.

## Қорытынды.

Бұл жұмыста уақыт бойынша айнымалы кешігулері, белгісіз параметрлері және жоғары ретті сызықты еместіктері бар жүйелер үшін кең ауқымды практикалық ізге түсіру есебі қарастырылды.

Ұсынылған әдіс жүйеге қойылатын шарттарды әлсіретумен және кешігу мен белгісіздік жағдайында басқарудың тиімділігін қамтамасыз етуімен ерекшеленеді.

Алынған нәтижелер тұйық циклдік жүйенің барлық күйлерінің кең ауқымды шектелгендігін және ізге түсіру қателігінің ақырлы уақыттан кейін алдын ала берілген дәлдік аймағына жеткізілетіндігін теориялық түрде дәлелдейді. Сонымен қатар, басқару заңының үздіксіз түрде құрылуы оның практикалық жүзеге асырылуын жеңілдетеді.

Алынған нәтижелер робототехникада, ұшқышсыз басқару жүйелерінде, энергетикалық және мехатроникалық қондырғыларда қолдануға перспективалы.

Болашақ зерттеулерде ұсынылған тәсілді көпайнымалы жүйелерге, желілік басқару құрылымдарына және кездейсоқ бұзылыстары бар жүйелерге кеңейту жоспарланады.

### Әдебиеттер


BenAbdallah, Khalifa, Mabrouk, 2013 – BenAbdallah A., Khalifa T., Mabrouk M. Adaptive practical output tracking control for a class of uncertain nonlinear systems // International Journal of Systems Science. – 2013. – Vol. 44, Issue 8. – P. 1421–1431. [Eng.]

Daniel, Li, Niu, 2005 – Daniel W., Li J.M., Niu Y.G. Adaptive neural control for a class of nonlinearly parametric time-delay systems // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2005. – Vol. 16, Issue 3. – P. 625–635. [Eng.]

Hua, Wang, Guan, 2008 – Hua C.C., Wang Q.G., Guan X.P. Adaptive tracking controller design of nonlinear systems with time delays and unknown dead-zone input // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2008. – Vol. 53, Issue 8. – P. 1753–1759. [Eng.]

Isidori, 2000 – Alberto Isidori A. Nonlinear systems. – 3rd ed. – NY.: Springer-Verlag, 2000. – 545 p. [Eng.]

Jia, Li, Wen, 2015 – Jia Y., Li Y., Wen C. Adaptive output feedback control for nonlinear systems with time-varying delay // International Journal of Systems Science. – 2015. – Vol. 46, Issue 3. – P. 409–420. [Eng.]

Khalil, 2002 – Hassan K. Khalil H.K. Nonlinear systems. – 3rd ed. – NJ.: Prentice-Hall, 2002. – 742 p. [Eng.]

Lin, Pongvuthithum, 2003 – Wei Lin W., Pongvuthithum R. Adaptive output tracking of inherently nonlinear systems with nonlinear parameterization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2003. – Vol. 48, Issue 9. – P. 1641–1653. [Eng.]

Polendo, Qian, 2007 – Polendo J., Chengyu Qian C. A generalized homogeneous domination approach for global stabilization of inherently nonlinear systems via output feedback // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2007. – Vol. 17, Issue 7. – P. 605–629. [Eng.]

Qian, Lin, 2002 – Chengyu Qian C.J., Wei Lin W. Practical output tracking of nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – Vol. 47, Issue 1. – P. 21–36. [Eng.]

Sun, Liu, Xie, 2008 – Sun Z.-Y., Yongqiang Liu Y., Xie X. Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems // Acta Automatica Sinica. – 2008. – Vol. 34, Issue 8. – P. 984–989. [Eng.]

Sun, Zhang, Xie, 2013 – Sun Z.Y., Zhang X.H., Xie X.J. Continuous global stabilization of high-order time-delay nonlinear systems // International Journal of Control. – 2013. – Vol. 86, Issue 6. – P. 994–1007. [Eng.]

Yan, Liu, 2012 – Yan X., Yongqiang Liu Y. The further result on global practical tracking for high-order uncertain nonlinear systems // Journal of Systems Science and Complexity. – 2012. – Vol. 25. – P. 227–237. [Eng.]

Тасболатұлы и др., 2024 – Тасболатұлы Н., Ерденова А.К., Назырова А.Е., Бахадирова Г.Б., Алишева С.С. Глобальное практическое отслеживание выходных данных для класса неопределенных нелинейных систем // Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан. – 2024. – № 1 (91). – С. 1–16. – DOI: https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.13 [Russ.]

**References**

BenAbdallah, Khalifa, Mabrouk, 2013 – BenAbdallah A., Khalifa T., Mabrouk M. Adaptive practical output tracking control for a class of uncertain nonlinear systems // International Journal of Systems Science. – 2013. – Vol. 44, Issue 8. – P. 1421–1431. [Eng.]

Daniel, Li, Niu, 2005 – Daniel W., Li J.M., Niu Y.G. Adaptive neural control for a class of nonlinearly parametric time-delay systems // IEEE Transactions on Neural Networks. – 2005. – Vol. 16, Issue 3. – P. 625–635. [Eng.]

Hua, Wang, Guan, 2008 – Hua C.C., Wang Q.G., Guan X.P. Adaptive tracking controller design of nonlinear systems with time delays and unknown dead-zone input // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2008. – Vol. 53, Issue 8. – P. 1753–1759. [Eng.]

Isidori, 2000 – Isidori A. Nonlinear systems. – 3rd ed. – NY: Springer-Verlag, 2000. – 545 p. [Eng.]

Jia, Li, Wen, 2015 – Jia Y., Li Y., Wen C. Adaptive output feedback control for nonlinear systems with time-varying delay // International Journal of Systems Science. – 2015. – Vol. 46, Issue 3. – P. 409–420. [Eng.]

Khalil, 2002 – Khalil H.K. Nonlinear systems. – 3rd ed. – NJ: Prentice-Hall, 2002. – 742 p. [Eng.]

Lin, Pongvuthithum, 2003 – Lin W., Pongvuthithum R. Adaptive output tracking of inherently nonlinear systems with nonlinear parameterization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2003. – Vol. 48, Issue 9. – P. 1641–1653. [Eng.]

Polendo, Qian, 2007 – Polendo J., Qian C. A generalized homogeneous domination approach for global stabilization of inherently nonlinear systems via output feedback // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2007. – Vol. 17, Issue 7. – P. 605–629. [Eng.]

Qian, Lin, 2002 – Qian C., Lin W. Practical output tracking of nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2002. – Vol. 47, Issue 1. – P. 21–36. [Eng.]

Sun, Liu, Xie, 2008 – Sun Z.Y., Liu Y., Xie X. Adaptive practical output tracking control for high-order nonlinear uncertain systems // Acta Automatica Sinica. – 2008. – Vol. 34, Issue 8. – P. 984–989. [Eng.]

Sun, Zhang, Xie, 2013 – Sun Z.Y., Zhang X.H., Xie X.J. Continuous global stabilization of high-order time-delay nonlinear systems // International Journal of Control. – 2013. – Vol. 86, Issue 6. – P. 994–1007. [Eng.]

Tasbolatuly et al., 2024 – Tasbolatuly N., Erdenova A.K., Nazyrova A.E., Bakhadirova G.B., Alisheva S.S. Globalnoe prakticheskoe otslezhivanie vykhodnykh dannykh dlya klassa neopredelennykh nelineinykh sistem // Vestnik Natsionalnoi inzhenernoi akademii Respubliki Kazakhstan. – 2024. – No. 1 (91). – P. 1–16. – DOI: https://doi.org/10.47533/2024.1606-146X.13 [Russ.]

Yan, Liu, 2012 – Yan X., Liu Y. The further result on global practical tracking for high-order uncertain nonlinear systems // Journal of Systems Science and Complexity. – 2012. – Vol. 25. – P. 227–237. [Eng.]